4. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Mo 27.04.09

Aufgabe 64: Welche Stromdichte führt auf ein elektrisches Feld der Form $\vec{E} \doteq (f(y), 0, 0)$? (3)
Befragen Sie zur Lösung alle vier Maxwellgleichungen.

Aufgabe 65: Zwei unendlich dünne und unendlich ausgedehnte Kondensatorplatten sind senkrecht zur x-Achse bei $x = \frac{d}{2}$ und bei $x = -\frac{d}{2}$ aufgestellt. Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ändere sich in einer solchen Weise, dass für $t > 0$ im Innenraum ($|x| < \frac{d}{2}$) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha\, t\, \vec{e}_x$ erzeugt wird, d.h. der Kondensator wird gleichmäßig aufgeladen. Strom- und Ladungsdichte seien nur auf den Kondensatorplatten von Null verschieden. (5)

(a) Bestimmen Sie für $t > 0$ aus den Maxwellgleichungen ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ im Innenraum. Nutzen Sie die Invarianz des Problems unter Verschiebungen in der yz-Ebene, um andere Lösungen $\vec{B}$ zu erhalten. Wie unterscheiden sich diese? *Hinweis:* $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \times \vec{r}$ löst $\vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = \vec{\omega}$.

(b) Multiplizieren Sie die Innenraum-Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit geeigneten Θ-Funktionen, um für $t > 0$ eine im ganzen Raum gültige Lösung zu erhalten, bei der die Felder im Außenraum verschwinden. Lesen Sie nun aus den relevanten Maxwellgleichungen die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$ ab und interpretieren Sie diese. *Hinweis:* $(\vec{e}_x \times \vec{r}) \times \vec{e}_x = \vec{r}_\perp$.

(c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung.

Aufgabe 66: In der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ löst $\phi \equiv 0$ die Maxwellgleichungen im Vakuum (ρ=0 und $\vec{j}$=0). Das Vektorpotenzial $\vec{A}$ erfüllt dann dieselbe Wellengleichung wie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die sich gemäß $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ aus dem Vektorpotenzial berechnen. (4)

(a) Weisen Sie nach, dass $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0\, f(t - \frac{x}{c})$ mit einem konstanten Vektor $\vec{A}_0$ und einer beliebigen skalaren Funktion f eine Lösung der Wellengleichung ist. In welche Richtung $\vec{n}$ (Einheitsvektor) breitet sich die Welle aus?

(b) Benutzen Sie die Produkt- und Kettenregel, um aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ den Zusammenhang $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$ herzuleiten.

(c) Berechnen Sie sowohl die Energiestromdichte $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{B}$ als auch die Energiedichte $u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ und überprüfen Sie damit, ob $\vec{S} = c\, u\, \vec{n}$ erfüllt ist.